Иерархия уравнения КдФ

На прошлой лекции мы обсудили общее понятие высших симметрий и как их можно искать по определению или методом неопределенных коэффициентов. Перейдем теперь к более технологичному методу основанному на представлении нулевой кривизны, на примере уравнения КдФ

$$u_{t_3} = u_3 + 6uu_1 \tag{1}$$

(в другом фрагменте рассматривается аналогичная процедура для нелинейного уравнения Шредингера).

Рассмотрим условие совместности для пары линейных уравнений

$$\psi_{xx} = -(u+\lambda)\psi, \qquad \psi_t = b\psi + 2a\psi_x.$$

Сначала вычисляем ψ_{xt}, дифференцируя второе уравнение и заменяя ψ_{xx} из первого:

$$\psi_{xt} = (b_x - 2(u+\lambda)a)\psi + (b + 2a_x)\psi_x.$$

Теперь вычисляем ψ_{xxt} двумя разными способами:

$$\begin{aligned}\psi_{xxt} &= (b_{xx} - 2u_x a - (u+\lambda)(4a_x + b))\psi + 2(b_x + a_{xx} - (u+\lambda)a)\psi_x\\ &= -u_t\psi - (u+\lambda)(b\psi + 2a\psi_x).\end{aligned}$$

Кое-что сокращается и коэффициенты при ψ, ψ_x дают

$$a_{xx} + b_x = 0, \quad u_t = -b_{xx} + 4(u+\lambda)a_x + 2u_x a.$$

Исключая b, получаем условие совместности в виде

$$u_t = a_{xxx} + 4(u+\lambda)a_x + 2u_x a. \tag{2}$$

Это основная формула, которая нам понадобится. Заметим, что можно положить $b = -a_x$ не теряя общности. Константа интегрирования не важна, так как в уравнение для u_t она всё равно не входит. Для порядка, её можно прибить преобразованием вида $\tilde{\psi} = e^{c(t)}\psi$, тогда наши линейные уравнения примут вид

$$\psi_{xx} = -(u+\lambda)\psi, \quad \psi_t = -a_x\psi + 2a\psi_x, \quad \psi_{xt} = -(a_{xx} + 2(u+\lambda)a)\psi + a_x\psi_x.$$

Это можно переписать в виде матричного представления нулевой кривизны:

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi \quad \Rightarrow \quad U_t - V_x = [V, U],$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_x \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u-\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -a_x & 2a \\ -a_{xx} - 2(u+\lambda)a & a_x \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Алгоритм вывода симметрий. Ищем a в виде многочлена по λ, точнее, по -4λ (так удобнее):

$$a = a^{(n)} = A_0(-4\lambda)^n + A_1(-4\lambda)^{n-1} + \cdots + A_n.$$

Тогда подстановка в (2) даёт такую систему:

$$\begin{aligned}
\lambda^{n+1}: &\qquad 0 = A_{0,x}, \\
\lambda^{n-j}: &\qquad A_{j+1,x} = A_{j,xxx} + 4uA_{j,x} + 2u_xA_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \\
\lambda^0: &\qquad u_t = A_{n,xxx} + 4uA_{n,x} + 2u_xA_n = A_{n+1,x}.
\end{aligned}$$

Здесь A_{n+1} фиктивный коэффициент, введённый для однообразия. Обратим внимание, что вид рекуррентных соотношений для A_j не зависит от n, то есть, удобно считать, что A_j образуют бесконечную последовательность, которую мы обрываем, где хотим и используем для определения u_t.

Положим $A_0 = 1/2$, тогда $A_{1,x} = u_1$ и возникает последовательность уравнений

$$u_{t_{2n+1}} = f_{n+1} = R^n(u_1), \quad R = D_x^2 + 4u + 2u_1 D_x^{-1}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{4}$$

Оператор R называется оператором рекурсии. Если выбирать постоянные интегрирования так, чтобы в результате получались многочлены, однородные относительно веса $\mathrm{w}(u_j) = j + 2$, то возникают такие уравнения (попробуйте воспроизвести их вручную до t_5 или даже t_7, это не так сложно):

$$\begin{aligned}
u_{t_1} &= D_x(u) = u_1, \\
u_{t_3} &= D_x(u_2 + 3u^2) = u_3 + 6uu_1, \\
u_{t_5} &= D_x(u_4 + 10uu_2 + 5u_1^2 + 10u^3), \\
u_{t_7} &= D_x(u_6 + 14uu_4 + 28u_1u_3 + 21u_2^2 + 70u^2u_2 + 70uu_1^2 + 35u^4), \\
u_{t_9} &= D_x(u_8 + 18uu_6 + 54u_1u_5 + 114u_2u_4 + 69u_3^2 \\
&\qquad + 126u^2u_4 + 504uu_1u_3 + 378uu_2^2 + 462u_1^2u_2 \\
&\qquad + 420u^3u_2 + 630u^2u_1^2 + 126u^5), \quad \dots
\end{aligned} \tag{5}$$

На компьютере можно проверить, что все выписанные дифференцирования действительно коммутируют с D_{t_3}, то есть, мы получили высшие симметрии КдФ (более того, все дифференцирования попарно коммутируют).

Всё вроде бы хорошо, но кое-что непонятно.

Вопросы к алгоритму

• В рекуррентных соотношениях (4) приходится интегрировать. Верно ли, что интеграл всегда берётся, то есть, что $f_n \in \operatorname{Im} D_x$?

• Насколько важен выбор констант интегрирования? В частности, что будет, если брать их зависящими от каких-то времён t_k?

• Как доказать в общем виде, что построенные дифференцирования коммутируют?

Ответы

• Так как вид уравнений для A_j не зависит от степени n, можно ввести для них производящую функцию

$$a = A_0 + A_1/(-4\lambda) + A_2/(-4\lambda)^2 + \dots,$$

удовлетворяющую уравнению

$$a_{xxx} + 4(u+\lambda)a_x + 2u_x a = 0. \tag{6}$$

У него имеется первый интеграл (интегрирующий множитель $2a$):

$$2aa_{xx} - a_x^2 + 4(u+\lambda)a^2 = 4\lambda c_{-1} + c_0 + c_1/(-4\lambda) + \dots, \tag{7}$$

откуда видно, что все A_n находятся алгебраически. Обратите внимание, что этот первый интеграл есть в точности определитель матрицы V, построенной по производящей функции a. Такая матрица удовлетворяет уравнению $V_x = [U, V]$ и постоянство $\det V$ следует из формулы Лиувилля:

$$(\log\det V)_x = \operatorname{tr} V_x V^{-1} = \operatorname{tr}(U - VUV^{-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\det V)_x = 0.$$

• Коэффициенты c_j играют роль постоянных интегрирования. Любые два решения (в виде рядов по λ^{-1}) уравнения (6) отличаются скалярным множителем $\alpha_0+\alpha_1/\lambda+\dots$ не зависящим от x. В частности, можно его выбрать так, чтобы все c_j, кроме c_{-1}, были равны 0, что отвечает однородным уравнениям (5).

В принципе, c_j можно брать зависящими от времён, но это нарушает коммутативность потоков. Мы докажем её для случая, когда c_j ни от чего не зависят.

• Пусть дано уравнение $u_t=f(t,x,u,\dots,u_n)$. Его симметрии $u_T=g(t,x,u,\dots,u_N)$ определяются уравнением

$$(\partial_t+\nabla_f-f_*)(g)=0,$$

откуда следует, что если оператор R удовлетворяет уравнению

$$[\partial_t+\nabla_f-f_*,R]=0,$$

то он переводит симметрию в симметрию. Можно проверить прямым вычислением, что для $f=u_3+6uu_1$ и оператора R из (4) это уравнение выполнено, если считать, что $[\partial_t,D_x^{-1}]=0$, что означает, что константы интегрирования не зависят от t.

Дополнительные замечания

Можно дать альтернативное доказательство коммутативности, основанное на продолжении дифференцирований на коэффициенты производящей функции a (ср. с аналогичным доказательством в файле `07_NLS hierarchy.pdf`).

• Нетрудно проверить, что уравнению (6) удовлетворяет произведение любых двух решений уравнения Шрёдингера $\psi_{xx}=-(u+\lambda)\psi$, то есть

$$a=\psi\tilde\psi.$$

При этом константа интегрирования в правой части (7) выражается через вронскиан $w=\psi\tilde\psi_x-\psi_x\tilde\psi$.

• Для a можно получить также представление через ряд $v(z)$, возникающий при обращении преобразования Миуры:

$$a=\frac{2z}{v(-z)-v(z)},\quad v'=-v^2-u-\lambda,\quad \lambda=-z^2.$$

Нетрудно проверить, что уравнение (7) следует из уравнения для v. Это легко связать с предыдущей формулой, вспомнив, что $v=\psi_x/\psi$.

• Продолжение дифференцирования $D_{t_{2+1}}$ на v и на a определяется уравнениями (их несложно вывести из уравнений для ψ)

$$D_{t_{2n+1}}(v)=D_x\big(a^{(n)}v-\frac{1}{2}D_x(a^{(n)})\big),\quad D_{t_{2n+1}}(a)=a^{(n)}D_x(a)-D_x(a^{(n)})a,$$

где $a^{(n)}=A_0(-4\lambda)^n+A_1(-4\lambda)^{n-1}+\dots+A_n$. Из последнего равенства следует тождество

$$\begin{aligned}D_{t_{2n+1}}(A_{m+1})=A_0D_x(A_{n+m+1})+\dots+A_nD_x(A_{m+1})\\ -D_x(A_0)A_{n+m+1}-\dots-D_x(A_n)A_{m+1}.\end{aligned}$$

Правая часть симметрична относительно m,n, то есть

$$D_{t_{2n+1}}(A_{m+1})=D_{t_{2m+1}}(A_{n+1}),$$

и так как $u_{t_{2n+1}}=D_x(A_{n+1})$, это доказывает, что $[D_{t_{2n+1}},D_{t_{2m+1}}]=0$.